Les séries de fonctions

M6 – Chapitre 3

Soient $\quad J \subset I = [a;b] \subset \mathbb{R} \quad x \in I \quad f_n : I \to \mathbb{C} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$

Convergence sur I	Suite de fonctions	Séries de fonctions
Simple $\Uparrow$	$f_n \overset{C.S.}{\longrightarrow} l$ $\Leftrightarrow \forall\, x \ \boxed{\lim_{n\to\infty} f_n(x) = l(x)}$	$\sum f_n \overset{C.S.}{\longrightarrow} S$ $\Leftrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S}$
Uniforme $\Uparrow$	$f_n \overset{C.U.}{\longrightarrow} l$ $\Leftrightarrow \boxed{\lVert f_n - l \rVert_\infty^I \to 0}$ $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n(\varepsilon), \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in I,$ $\lvert f_n(x) - l(x) \rvert \leq \varepsilon$	$\sum f_n \overset{C.U.}{\longrightarrow} S$ $\Leftrightarrow \boxed{\lVert S_n - S \rVert_\infty^I \to 0}$
Normale		$\sum f_n \overset{C.N.}{\longrightarrow} S$ $\Leftrightarrow \boxed{\sum \lVert f_n \rVert_\infty^I \text{ converge}}$ vers S $\Leftrightarrow \boxed{\exists\, \alpha_n \geq \lvert f_n \rvert \text{ t.q. } \sum \alpha_n \text{ converge}}$
Théorèmes		
Continuité	$f_n \overset{C.S.}{\longrightarrow} l$ f_n cont. et der. $\Rightarrow l$ non cont. $f_n \overset{C.U.}{\longrightarrow} l$ $f_n$continue $\Rightarrow l$ continue	$\sum f_n \overset{C.S.}{\longrightarrow} S$ $f_n$continue $\Rightarrow S$ continue
Intégration	$f_n \overset{C.U.}{\longrightarrow} l$ $\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(x) = \int_a^x \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=\,l}}$	$\sum f_n \overset{C.U.}{\longrightarrow} S$ $\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^x S_n = \int_a^x \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n}_{=S}}$
Dérivation		$\left.\begin{array}{l} f_n \in \mathcal{C}^1 \\ \sum f_n \text{ C.S. sur } I \\ \sum f_n' \text{ C.U. sur } J \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'}$

Remarques sur la norme infinie

$$\boxed{\lVert f(x) \rVert_\infty^I = \sup \lvert f(x) \rvert}$$

- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lVert \lambda f \rVert_\infty^I = \lvert \lambda \rvert \lVert f \rVert_\infty^I$
- $\forall\, (f,g) \in B(I)^2 \quad \lVert f + g \rVert_\infty^I \leq \lVert f \rVert_\infty^I + \lVert g \rVert_\infty^I$